

УДК 517.927+517.983.35

# К вопросу о знакорегулярности положительных дифференциальных операторов четвёртого порядка

А. А. Владимиров

**Аннотация:** Устанавливается, что положительность внутри открытого квадрата  $(0, 1) \times (0, 1)$  функции Грина положительно определённого обыкновенного дифференциального оператора четвёртого порядка с распадающимися граничными условиями представляет собой необходимое и достаточное условие того, чтобы этот оператор не понижал числа перемен знака.

## § 1. Введение

1. Зафиксируем подпространство  $\mathfrak{H} \subseteq W_2^2[0, 1]$ , представляющее собой ортогональное дополнение некоторого (возможно, пустого) линейно независимого набора распределений класса  $\text{Lin}\{\delta_0, \delta'_0\} \cup \text{Lin}\{\delta_1, \delta'_1\} \subset W_2^{-2}[0, 1]$ . Рассмотрим оператор  $L: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}^*$ , заданный тождеством

$$(1) \quad \langle Ly, z \rangle \equiv \int_0^1 p y'' \overline{z''} dx + \langle q, \overline{y'} z' \rangle + \langle h, \overline{y} z \rangle,$$

где функция  $p \in L_\infty[0, 1]$  равномерно положительна, а распределения  $q \in W_2^{-1}[0, 1]$  и  $h \in W_2^{-2}[0, 1]$  вещественны (то есть сопоставляют вещественнозначным пробным функциям вещественные значения). Целью настоящей статьи является установление следующего факта.

**1.1.** Пусть оператор вида (1) положительно определён, а его функция Грина

$$G(t, s) \equiv \overline{\langle \delta_t, L^{-1} \delta_s \rangle}$$

положительна внутри открытого квадрата  $(0, 1) \times (0, 1)$ . Тогда число знакоперемен никакой вещественнозначной функции  $y \in \mathfrak{H}$  не превосходит числа знакоперемен соответствующего распределения  $Ly \in \mathfrak{H}^*$ .

Здесь и далее мы считаем вещественную обобщённую функцию  $f \in \mathfrak{H}^*$  имеющей не более  $n \in \mathbb{N}$  перемен знака, если она допускает в пространстве  $\mathfrak{H}^*$  сколь угодно точную аппроксимацию имеющими не более  $n$  перемен знака непрерывными функциями.

Отметим, что функция Грина положительного оператора вида (1), не понижающего числа перемен знака, заведомо является положительной внутри квадрата  $(0, 1) \times (0, 1)$ . Тем самым, в рассматриваемом классе операторов утверждение 1.1 представляет собой критерий.

**2.** Доказательство утверждения 1.1 будет осуществлено нами на основе последовательной редукции задачи к следующей хорошо изученной ситуации.

**2.1.** Пусть оператор  $L: W_2^2[0, 1] \rightarrow W_2^{-2}[0, 1]$  задан тождеством

$$\langle Ly, z \rangle \equiv \int_0^1 p y'' \overline{z''} dx + \alpha y(0) \overline{z(0)} + \beta y'(0) \overline{z'(0)} + \gamma y'(1) \overline{z'(1)},$$

где коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  положительны, а функция  $p \in L_\infty[0, 1]$  равномерно положительна. Тогда этот оператор не понижает числа перемен знака.

Изложению основных промежуточных шагов редукционного процесса будет посвящён § 2. В заключительном § 3 будет завершено доказательство утверждения 1.1, а также обсуждены некоторые примеры его применения.

## § 2. Вспомогательные утверждения

**1.** Для полноты изложения укажем сперва доказательство утверждения § 1.2.1. Заметим, что используемое нами определение числа знакоперемен обобщённой функции позволяет ограничиться установлением того факта, что для всякой вещественнозначной функции  $f \in C[0, 1]$  соответствующая функция  $y \rightleftharpoons L^{-1}f$  имеет не большее число знакоперемен. Такая функция  $y \in W_2^2[0, 1]$ , однако, представляет собой (см., например, [1]) решение граничной задачи

$$\begin{aligned} & (py'')'' = f, \\ (1) \quad & (py'')'(0) + \alpha y(0) = 0, \\ (2) \quad & (py'')(0) - \beta y'(0) = 0, \\ (3) \quad & (py'')'(1) = 0, \\ (4) \quad & (py'')(1) + \gamma y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим набор точек  $0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n+1} < 1$ , где  $n \geq 1$ , удовлетворяющий при всех  $k \in 1 \dots n$  неравенствам  $y(\xi_k)y(\xi_{k+1}) < 0$ . Согласно теореме Лагранжа, для всех  $k \in 1 \dots n$  найдутся точки  $\xi_{1,k} \in (\xi_k, \xi_{k+1})$  со свойством  $y'(\xi_{1,k})y(\xi_{k+1}) > 0$ . При этом либо найдётся также точка  $\xi_{1,0} \in (0, \xi_1)$  со свойством  $y'(\xi_{1,0})y(\xi_1) > 0$ , либо, ввиду граничного условия (1), будет выполняться неравенство  $(py'')'(0) \cdot y(\xi_1) < 0$ . Положим  $m \rightleftharpoons 0$  в первом случае и  $m \rightleftharpoons 1$  — во втором. Для всех  $k \in m \dots n-1$  найдутся точки  $\xi_{2,k} \in (\xi_{1,k}, \xi_{1,k+1})$  со свойством  $(py'')(\xi_{2,k})y'(\xi_{2,k+1}) > 0$ . Аналогичным образом, ввиду граничных условий (2) и (4), найдутся точки  $\xi_{2,m-1} \in (0, \xi_{1,m})$  и  $\xi_{2,n} \in (\xi_{1,n}, 1)$  со свойствами  $(py'')(\xi_{2,m-1})y'(\xi_{1,m}) > 0$  и  $(py'')(\xi_{2,n})y'(\xi_{1,n}) < 0$ . Далее, для всех  $k \in m-1 \dots n-1$  найдутся точки  $\xi_{3,k} \in (\xi_{2,k}, \xi_{2,k+1})$  со свойством  $(py'')'(\xi_{3,k}) \cdot (py'')(\xi_{2,k+1}) > 0$ . При этом выполняется неравенство  $(py'')'(\xi_{2,0})y(\xi_1) < 0$ , что, ввиду сказанного ранее, гарантирует в случае  $m = 1$  существование точки  $\xi_{3,-1} \in (0, \xi_{2,0})$  со свойством  $(py'')'(\xi_{3,-1}) \cdot (py'')(\xi_{2,0}) > 0$ . Наконец, для всех  $k \in -1 \dots n-2$  найдутся точки  $\xi_{4,k} \in (\xi_{3,k}, \xi_{3,k+1})$  со свойством  $f(\xi_{4,k}) \cdot (py'')'(\xi_{3,k+1}) > 0$ . Поскольку, ввиду граничного условия (3), найдётся также точка  $\xi_{4,n-1} \in (\xi_{3,n-1}, 1)$  со свойством  $f(\xi_{4,n-1}) \cdot (py'')'(\xi_{3,n-1}) < 0$ , то функция  $f$  имеет не менее  $n$  перемен знака. Тем самым, утверждение § 1.2.1 справедливо.

Равносильные утверждению § 1.2.1 положения установлены, в частности, в разделе [2: Гл. III, § 8].

2. Вторым шагом нашего построения будет установление справедливости следующего факта.

**2.1.** Пусть положительный оператор  $L: W_2^2[0, 1] \rightarrow W_2^{-2}[0, 1]$  задан тождеством

$$\langle Ly, z \rangle \equiv \int_0^1 p y'' \overline{z''} dx + \langle q, \overline{y' z'} \rangle + \alpha y(0) \overline{z(0)},$$

где коэффициент  $\alpha$  положителен, функция  $p \in L_\infty[0, 1]$  равномерно положительна, а распределение  $q \in W_2^{-1}[0, 1]$  вещественно. Тогда этот оператор не понижает числа перемен знака.

**Доказательство.** В рассматриваемом случае является положительным оператор  $S: W_2^1[0, 1] \rightarrow W_2^{-1}[0, 1]$  вида

$$\langle Sy, z \rangle \equiv \int_0^1 p y' \overline{z'} dx + \langle q, \overline{yz} \rangle.$$

Согласно теории Штурма (см., например, [3]), это означает наличие постоянной  $\omega > 0$ , для которой функция  $\sigma \equiv \omega S^{-1}(\delta_0 + \delta_1) \in W_2^1[0, 1]$  равномерно положительна и подчиняется равенству  $\int_0^1 \sigma dx = 1$ . Введём в рассмотрение оператор  $V: W_2^2[0, 1] \rightarrow W_2^2[0, 1]$  вида  $Vy \equiv y \circ \tau$ , где положено  $\tau(x) \equiv \int_0^x \sigma dt$ . Для такого оператора легко проверяется справедливость тождеств

$$\begin{aligned} [Vy]' &= (y' \circ \tau) \cdot \sigma, \\ [Vy]'' &= (y'' \circ \tau) \cdot \sigma^2 + (y' \circ \tau) \cdot \sigma', \\ |[Vy]''|^2 &= (|y''|^2 \circ \tau) \cdot \sigma^4 + \sigma' \cdot \left( \frac{|[Vy]']^2}{\sigma} \right)'. \end{aligned}$$

Из них, в свою очередь, немедленно вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \langle V^* LVy, y \rangle &= \int_0^1 \hat{p} \cdot |y''|^2 dx + \langle S\sigma, \frac{|[Vy]']^2}{\sigma} \rangle + \alpha \cdot |y(0)|^2 \\ &= \int_0^1 \hat{p} \cdot |y''|^2 dx + \alpha \cdot |y(0)|^2 + \omega \sigma(0) \cdot |y'(0)|^2 + \omega \sigma(1) \cdot |y'(1)|^2, \end{aligned}$$

в которых функция  $\hat{p} \in L_\infty[0, 1]$  определяется условием  $\hat{p} \circ \tau = p\sigma^3$ . С учётом хорошо известного для полуторалинейных форм принципа поляризации [4: Гл. I, (6.11)] последнее означает справедливость тождества

$$\langle V^* LVy, z \rangle \equiv \int_0^1 \hat{p} y'' \overline{z''} dx + \alpha y(0) \overline{z(0)} + \beta y'(0) \overline{z'(0)} + \gamma y'(1) \overline{z'(1)},$$

где положено  $\beta \equiv \omega \sigma(0) > 0$  и  $\gamma \equiv \omega \sigma(1) > 0$ .

Итак, оператор  $V^* LV$  имеет вид, указанный при формулировке утверждения § 1.2.1, а потому не понижает числа перемен знака. Однако операторы  $V$  и  $V^*$  очевидным образом сохраняют такое число. Соответственно, оператор  $L$  также не понижает числа перемен знака, что и требовалось доказать.  $\square$

Метод, использованный нами для доказательства утверждения 2.1, ранее применялся в работах [5] и [6]. Его основная идея, однако, содержится уже в работе [7: Theorem 12.1].

**3.** Третьим шагом нашего построения будет установление справедливости следующего факта.

**3.1.** Пусть справедливо равенство  $\mathfrak{H} = W_2^2[0, 1]$ , а положительно определённый оператор вида § 1.1 (1) имеет функцию Грина, равномерно положительную на замкнутом квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Тогда этот оператор не понижает числа перемен знака.

**Доказательство.** Сделанные предположения гарантируют равномерную положительность функции  $\sigma \Leftarrow L^{-1}\delta_0 \in W_2^2[0, 1]$ , а потому и ограниченную обратимость связанного с ней оператора  $V: W_2^2[0, 1] \rightarrow W_2^2[0, 1]$  вида  $Vy \Leftarrow \sigma y$ . Далее, при помощи рассуждений, аналогичных проведённым в ходе доказательства утверждения 2.1, устанавливается справедливость равенств

$$\begin{aligned} \langle V^*LVy, y \rangle &= \int_0^1 \hat{p} \cdot |y''|^2 dx + \langle \hat{q}, |y'|^2 \rangle + \langle L\sigma, \sigma |y|^2 \rangle \\ &= \int_0^1 \hat{p} \cdot |y''|^2 dx + \langle \hat{q}, |y'|^2 \rangle + \alpha \cdot |y(0)|^2, \end{aligned}$$

где положено  $\hat{p} \Leftarrow p\sigma^2$  и  $\alpha \Leftarrow \sigma(0) > 0$ , а распределение  $\hat{q} \in W_2^{-1}[0, 1]$  имеет вид

$$\langle \hat{q}, y \rangle \equiv \langle q, \sigma^2 y \rangle + \int_0^1 2p \cdot [2(\sigma')^2 - \sigma\sigma''] \bar{y} dx + \int_0^1 p \cdot (\sigma^2)' \bar{y}' dx.$$

С учётом принципа поляризации это означает, что оператор  $V^*LV$  имеет вид, указанный при формулировке утверждения 2.1, а потому не понижает числа перемен знака. Тогда, ввиду сохранения числа знакоперемен при действии операторов  $V$  и  $V^*$ , оператор  $L$  также не понижает числа перемен знака, что и требовалось доказать.  $\square$

### § 3. Завершение доказательства и обсуждение

**1.** Итак, пусть выполнены условия утверждения § 1.1.1. Зафиксируем произвольное значение  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ . Ввиду положительности квадратичной формы оператора  $L$  на подпространстве  $\mathfrak{M} \Leftarrow L^{-1}\text{Lin}\{\delta_\varepsilon, \delta'_\varepsilon, \delta_{1-\varepsilon}, \delta'_{1-\varepsilon}\}$ , всякий набор из четырёх величин  $y(\varepsilon)$ ,  $y'(\varepsilon)$ ,  $y(1-\varepsilon)$  и  $y'(1-\varepsilon)$  однозначно определяет некоторую функцию  $y \in \mathfrak{M}$ . Положительность оператора  $L$  означает также, что поведение указанной функции слева от точки  $\varepsilon$  полностью определяется выбором пары величин  $y(\varepsilon)$  и  $y'(\varepsilon)$ , а её поведение справа от точки  $1-\varepsilon$  — выбором пары величин  $y(1-\varepsilon)$  и  $y'(1-\varepsilon)$ .

Пусть теперь оператор  $I: W_2^2[\varepsilon, 1-\varepsilon] \rightarrow \mathfrak{H}$  таков, что функция  $Iy \in \mathfrak{H}$  всегда совпадает с исходной функцией  $y \in W_2^2[\varepsilon, 1-\varepsilon]$  на отрезке  $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ , и с некоторой функцией класса  $\mathfrak{M}$  — вне этого отрезка. Учитывая стандартные представления

$$\begin{aligned} \langle q, y \rangle &\equiv - \int_0^1 Q \bar{y}' dx + \alpha \overline{y(0)}, & Q \in L_2[0, 1], \alpha \in \mathbb{R}, \\ \langle h, y \rangle &\equiv \int_0^1 H \bar{y}'' dx + \beta \overline{y(0)} + \gamma \overline{y'(0)}, & H \in L_2[0, 1], \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

функционалов  $q \in W_2^{-1}[0, 1]$  и  $h \in W_2^{-2}[0, 1]$ , устанавливаем справедливость тождества

$$\langle I^* L I y, y \rangle \equiv \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} p |y''|^2 dx + \langle \hat{q}, |y'|^2 \rangle + \langle \hat{h}, |y|^2 \rangle,$$

где  $\hat{q} \in W_2^{-1}[\varepsilon, 1-\varepsilon]$  и  $\hat{h} \in W_2^{-2}[\varepsilon, 1-\varepsilon]$  суть некоторые вещественные распределения. При этом функция Грина оператора  $I^* L I$  представляет собой ограничение функции Грина оператора  $L$  на квадрат  $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ , и потому на этом квадрате равномерно положительна. С учётом утверждения § 2.3.1 это означает, что для всякой имеющей не более  $n$  перемен знака функции  $f \in C[0, 1]$ , тождественно обращающейся в нуль за пределами отрезка  $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ , соответствующая функция  $y \rightleftharpoons L^{-1}f$  имеет на отрезке  $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$  не более  $n$  знакоперемен. Произвольность выбора значения  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  означает теперь, что оператор  $L^{-1}$  не повышает числа перемен знака никакой финитной функции  $f \in C[0, 1]$ . Для завершения доказательства утверждения § 1.1.1 остаётся лишь учесть непрерывный характер вложения  $L_1[0, 1] \hookrightarrow \mathfrak{H}^*$ .

**2.** Использованное нами определение § 1.1 (1) обыкновенного дифференциального оператора четвёртого порядка с распадающимися граничными условиями было введено в работе [1]. Оно представляет собой естественный результат дальнейшего развития предложенного в работе [8] подхода к определению оператора Штурма–Лиувилля с коэффициентами-распределениями.

Отметим, что класс задач с операторами вида § 1.1 (1) включает целый ряд постановок, в традиционной записи имеющих вид многоточечных. Так, формально трёх-точечная задача вида

$$\begin{aligned} y^{(4)} + y &= f, \\ y(0) = y'(0) = y''(1) + y'(1) + y(1) &= y'''(1) - y'(1) - y(1) = 0, \\ y(1/2 + 0) - y(1/2 - 0) &= y'(1/2 + 0) - y'(1/2 - 0) = y''(1/2 + 0) - y''(1/2 - 0) = \\ &= y'''(1/2 + 0) - y'''(1/2 - 0) + y(1/2) = 0 \end{aligned}$$

в действительности представляет собой задачу на пространстве

$$\mathfrak{H} = \{y \in W_2^2[0, 1] : y(0) = y'(0) = 0\}$$

с оператором вида § 1.1 (1), где  $p \equiv 1$ ,  $q = \delta_1$  и  $h = 1 + \delta_{1/2} + \delta_1 - \delta'_1$ .

**3.** Пусть оператор вида § 1.1 (1) положительно определён и не понижает числа перемен знака. Из теоремы Шёнберга [2: Гл. V, Теорема 4'] и обусловленных положительной определённой оператором  $L$  неравенств

$$G \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} > 0, \quad 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1,$$

немедленно вытекает справедливость при всяких  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$  и  $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < 1$  неравенства

$$G \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \geq 0.$$

Для случая, когда распределения  $q, h \in W_2^{-1}[0, 1]$  представляют собой неотрицательные линейные комбинации кусочно-непрерывных функций с дельта-функциями Дирака, справедливость указанного неравенства была установлена в недавней работе [9].

## Литература

- [1] *А. А. Владимиров*. О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов // Матем. заметки. — 2004. — Т. 75, № 6. — С. 941–943.
- [2] *Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн*. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
- [3] *А. А. Владимиров*. К осцилляционной теории задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами // Журнал выч. матем. и матем. физики. — 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1609–1621.
- [4] *Т. Като*. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [5] *Ж. Бен Амара, А. А. Владимиров*. Об осцилляции собственных функций задачи четвёртого порядка со спектральным параметром в граничном условии // Фунд. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, № 4. — С. 41–52.
- [6] *Ж. Бен Амара, А. А. Владимиров, А. А. Шкаликов*. Спектральные и осцилляционные свойства одного линейного пучка дифференциальных операторов четвёртого порядка // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 1. — С. 55–67.
- [7] *W. Leighton, Z. Nehari*. On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order // Trans. of AMS. — 1958. — V. 89. — P. 325–377.
- [8] *М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов*. Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 5. — С. 723–733.
- [9] *Р. Ч. Кулаев*. Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка // Дифф. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 445–458.